Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 14 - 26/10 (versión preliminar)

1 Voy mirando atrás y al comprobar

En la última clase comenzamos buscando soluciones T-periódicas para el problema

$$u''(t) + u(t) + u(t)^3 = \lambda p(t)$$

con $p \in C_T$, es decir: continua y T-periódica. Vimos que si $T \neq 2k\pi$, entonces hay soluciones para λ chico. Esto fue usando la versión usual del teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^n$, aunque la versión general en espacios de Banach promete grandes cosas: en efecto, se puede considerar directamente la función $F : C_T^2 \times C_T \to C_T$ dada por

$$F(u,p)(t) := u''(t) + u(t) + u(t)^3 - p(t).$$

Como $F(0,0) = 0$, si logramos ver que $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)$ es un isomorfismo, entonces estamos hechos: para cada p cercana al origen existe una única solución u cercana al origen. Claro que, al comienzo, puede resultar intimidante el hecho de derivar una función definida sobre un espacio de Banach; por eso, lo más fácil es calcular primero las derivadas direccionales. Eso no prueba, en principio, que la función sea diferenciable, pero ya nos pone sobre la pista de quién va a ser la diferencial:

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(u+s\varphi,p) - F(u,p)}{s} = \varphi'' + \varphi + \lim_{s\to 0} \frac{(u+s\varphi)^3 - u^3}{s}$$

$$= \varphi'' + \varphi + 3u^2\varphi.$$

El lector interesado puede terminar de comprobar que F es diferenciable (y su diferencial es continua); luego, la cuenta anterior nos dice que $\frac{\partial F}{\partial u}(u,p)(\varphi) = \varphi'' + \varphi + 3u^2\varphi$ y, en particular,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)(\varphi) = \varphi'' + \varphi.$$

La siguiente pregunta es si uno puede afirmar, así tan alegremente, que esto es un isomorfismo de C_T^2 en C_T. Y observemos que la primera parte de la cuenta se parece de manera más que sospechosa a la cuenta que hicimos la clase previa:

si $\varphi \in C_T^2$ satisface $\varphi'' + \varphi = 0$, entonces $\varphi(t) = a\cos t + b \operatorname{sen} t$. Usando que $\varphi(T) = \varphi(0)$ y $\varphi'(T) = \varphi'(0)$, se deduce que

$$\begin{pmatrix} \cos T & \operatorname{sen} T \\ -\operatorname{sen} T & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, para que el núcleo del operador sea trivial hay que pedir que $I - \begin{pmatrix} \cos T & \operatorname{sen} T \\ -\operatorname{sen} T & \cos T \end{pmatrix}$ sea inversible, es decir, $T \neq 2k\pi$.

Hasta aquí muy bien, aunque uno puede observar, con todo criterio, que falta bastante: por un lado, ver que el operador es también suryectivo y, finalmente, que la inversa es continua. Pero, por llamativo que parezca, estamos ante uno de esos casos en los que "monomorfismo implica isomorfismo". Eso es más que evidente cuando se trata de un operador lineal de $\mathbb{R}^n$, situación que tal vez recuerde el lector de aquellos buenos tiempos en los que resolvíamos ecuaciones en diferencias. Pero ahora se trata de un caso especial de la *alternativa de Fredholm*. Esto parece el título de una película en la que se ve a un conflictuado Fredholm teniendo que tomar una decisión difícil ante una encrucijada de su vida, pero en realidad es algo bien conocido en el análisis funcional. En este contexto, podemos dar una versión general para sistemas periódicos que se demuestra directamente a mano:

Proposición 1.1 *Sean $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz continua T-periódica y $L : C_T^1 \to C_T$ el operador lineal dado por $LX(t) = X'(t) + A(t)X(t)$. Si $\ker(L) = \{0\}$, entonces L es un isomorfismo.*

Demostración: Sea $M(t)$ una matriz fundamental para el problema homogéneo $X'(t) + A(t)X(t) = 0$, es decir, cuyas columnas forman una base de soluciones. Podemos elegir M de modo que $M(0) = I$. Por el método de variación de parámetros, si queremos resolver el problema $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$, proponemos una solución de la forma $X(t) = M(t)c(t)$, donde $c(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (el clásico "vector columna"). De acá se deduce que X es solución del sistema si

$$M(t)c'(t) = B(t)$$

es decir

$$c(t) = \gamma + \int_0^t M(s)^{-1}B(s)\,ds, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Si $B \in C_T$, es claro que $X \in C_T^1$ siempre que $X(T) = X(0)$, es decir:

$$\gamma = M(T)\left(\gamma + \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\,ds\right),$$

o bien

$$(I - M(T))\gamma = M(T)\left(\gamma + \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\,ds\right).$$

Como $\ker(L) = \{0\}$, resulta que $I - M(T)$ es inversible, y es inmediato verificar que la X así obtenida es continua como función de B.[1]

$\square$

Llegado este punto, uno puede observar que en realidad el problema anterior sale de una manera más directa: si pensamos $F : C_T^2 \to C_T$ dada por $F(u) = u'' + u + u^3$, entonces $F(0) = 0$ y $DF(0) : C_T^2 \to C_T$ es el mismo operador de antes; luego, es razonable pensar que existen $U \subset C_T^2$ y $V \subset C_T$ entornos de 0 tales que $F : U \to V$ es un difeomorfismo. Lo cual, dicho en criollo, implica que para toda $p \in V$ hay una única solución $u \in U$. Esto es precisamente el teorema de la función inversa:

Teorema 1.1 *Sean X, Y espacios de Banach, $A \subset X$ abierto y $f : A \to Y$ de clase C^n. Si $Df(x_0)$ es un isomorfismo, entonces existen U y V entornos respectivos de x_0 y $f(x_0)$ tales que $f : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^n, con $Df^{-1}(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}$.*

La demostración es sencilla a partir del teorema de la función implícita: para eso, alcanza con encontrar una función implícita $x = x(y)$ a partir de la igualdad $F(y, x) := y - f(x) = 0$. A modo de ejercicio, el lector puede intentar el camino inverso (valga la redundancia): usando el lema de las contracciones uniformes probar primero el Teorema 1.1 y usarlo para demostrar el teorema de la función implícita. El truco es bien conocido: si $A \subset X \times Y$ es abierto y $f : A \to Z$, entonces se puede definir $F : A \to X \times Z$ dada por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. A diferencia del caso $\mathbb{R}^n$, ahora no se puede argumentar que $DF(x_0, y_0)$ es una matriz en bloques, así que es un buen ejercicio probar que es un isomorfismo cuando $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ lo es. Una vez que logramos hacer de F un difeomorfismo hecho y derecho, para definir la función implícita $y(x)$ alcanza con mirar la segunda coordenada de $F^{-1}(x, 0)$.

Volviendo a los problemas periódicos, veamos qué se puede decir de la situación más general

$$x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon)$$

donde f es una función suave y T-periódica en t para todo ε. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución T-periódica para $\varepsilon = 0$ y llamemos $\hat{x}_0 := \hat{x}(0)$. La idea es encontrar una condición suficiente para que si $|\varepsilon|$ es chico exista una única solución T-periódica con valor inicial cercano a $\hat{x}_0$. Podemos comenzar con el enfoque en dimensión finita, vía Poincaré, así de paso entendemos mejor lo que ocurrió en el ejemplo anterior.

Una primera observación (¿y ahora nos avisan?) es que no hace falta preocuparse de antemano por conseguir que el operador de Poincaré esté definido: por el teorema de dependencia continua, si $|\varepsilon|$ y $|x_0 - \hat{x}_0|$ son chicos, la solución correspondiente al problema de valores iniciales se mantiene cerca de x_0 en todo el

[1]Para el que guste apelar a sus buenos recuerdos, cabe observar que este último paso se puede obviar: para espacios de Banach X, Y cualesquiera, si $L \in L(X, Y)$ es biyectiva entonces, por el teorema de la aplicación abierta, su inversa es continua.

intervalo $[0, T]$ y, en particular, está definida hasta T. De esta forma, podemos definir $F(x_0, \varepsilon) = x_0 - P_T(x_0, \varepsilon)$, tal como hicimos la clase pasada.

A fin de aplicar el teorema de la función implícita, solo tenemos que calcular la diferencial de P_T en el punto $(\hat{x}_0, 0)$, ya que -por suerte- la identidad sabemos cómo se deriva. Pero a esta altura nada nos asusta: si escribimos $x(t) = x(t, x_0, \varepsilon)$ y $M(t) = D_{x_0}x(t, x_0, \varepsilon)$, entonces la matriz M es solución del problema lineal

$$\begin{cases} M'(t) = D_x f(t, x(t), \varepsilon)M(t) \\ M(0) = I. \end{cases}$$

De esta forma, la condición que buscamos es que $I - M_0(T)$ sea inversible, donde $M_0(t) = M(t, \hat{x}_0, 0)$ es la solución del problema anterior para $\hat{x}(t)$. En otras palabras:

Proposición 1.2 *En la situación anterior, supongamos que* 1 *no es autovalor de* $M_0(T)$*. Entonces existe* $\eta > 0$*, un entorno* $V \subset \mathbb{R}^n$ *de* $\hat{x}_0$ *y una única función (suave)* $x_0 : (-\delta, \delta) \to V$ *tal que* $x_0(0) = \hat{x}_0$ *y* $x_0(\varepsilon)$ *es condición inicial de una solución* T*-periódica del problema.*

Veamos ahora cómo obtener el resultado aplicando el teorema de función implícita directamente en C^1_T. Para ello, podemos considerar $F : C^1_T \times \mathbb{R} \to C_T$ dada por $F(x, \varepsilon) = x' - f(\cdot, x, \varepsilon)$, que tiene un cero en $(\hat{x}, 0)$ y calcular, como antes:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}, 0)(\varphi) = \varphi'(t) - D_x f(t, \hat{x}(t), 0)\varphi(t).$$

La condición, entonces, es que el problema lineal

$$\varphi'(t) = D_x f(t, \hat{x}(t), 0)\varphi(t) \tag{1}$$

no tenga soluciones T-periódicas no triviales. Y, como uno espera, esto es exactamente lo mismo que la condición de la proposición anterior: si v es autovector de $M_0(T)$ con autovalor 1, entonces es claro que $\varphi(t) = M_0(t)v$ es una solución T-periódica no trivial de (1); recíprocamente, si φ es una solución T-periódica no trivial, entonces $v = \varphi(0)$ es autovector de $M_0(T)$ con autovalor 1. ¡Lo que es la ciencia! El lector entusiasta puede intentar sacar conclusiones similares para el caso de una ecuación con retardo $x'(t) = f(t, x_t, \varepsilon)$. El resultado en C^1_T es prácticamente idéntico, aunque el enfoque vía operador de Poincaré requiere definir $P_T : C[-\tau, 0] \to C[-\tau, 0]$: específicamente, $P_T(\varphi, \varepsilon) = x_T$, donde x es la solución del problema para ε con condición inicial $x_0 = \varphi$.

Cabe mencionar que la situación es distinta cuando se trata de un problema autónomo, es decir

$$x'(t) = f(x, \varepsilon),$$

en el que no hay un período T establecido de antemano. Por supuesto, es fácil detectar los equilibrios, es decir, las soluciones constantes, ya que se trata de los ceros de $f(\cdot, \varepsilon)$; sin embargo, encontrar órbitas cerradas que no sean constantes puede ser un problema delicado. Y lo más enojoso es que conocer una de esas órbitas para $\varepsilon = 0$ no parece ayudar mucho. Más precisamente, si para cierto

T tenemos una solución T- periódica no constante $\hat{x}$ para $\varepsilon = 0$, el teorema anterior no se aplica porque la matriz $M_0(T)$ siempre tiene algún autovector de autovalor 1. Para ver esto, alcanza con definir $\varphi(t) = \hat{x}'(t) \not\equiv 0$ y derivando como antes, despacito, despacito, tu ecuación una vez más, queda

$$\varphi'(t) = D_x f(t, \hat{x}(t), 0)\hat{x}'(t) = D_x f(t, \hat{x}(t), 0)\varphi'(t),$$

que es precisamente la ecuación (1). ¡Menuda frustración! ¡Qué ganas de llorar en esta tarde gris! Sin embargo, rápidamente podemos replicar: Fuerza, canejo, sufra y no llore, pues con algo de esfuerzo se obtiene un resultado de lo más profundo y sutil (por no decir "hondo y sensual"): si 1 es autovalor *simple* de $M_0(T)$, entonces existe $\delta > 0$ y funciones suaves x_0, T definidas en $(-\delta, \delta)$ tales que $x_0 = \hat{x}_0$, $T(0) = T$ y $x_0(\varepsilon)$ es condición inicial de una solución $T(\varepsilon)$-periódica. Es claro que la demostración se deduce también del teorema de la función implícita, como se puede ver de manera explícita en [1].

Una conclusión que se extrae del último párrafo es que, dejando de lado las interpretaciones en el campo de las ciencias sociales, a veces la falta de autonomía puede ser una ventaja. Esto se ve claro en el método de *averaging* en el que, como su nombre sugiere, tomando promedios el problema se reduce a estudiar una ecuación en dimensión finita. Para ser más precisos, dada la ecuación $x'(t) = \varepsilon f(t, x(t), \varepsilon)$ con f continua y T-periódica en t, se trata de obtener una rama de soluciones T-periódicas a partir de ceros del promedio $\phi(x) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, 0)\, dt$, con $x \in \mathbb{R}^n$. El procedimiento es similar a una idea que ya vimos para el problema de Nicholson discreto; ahora podemos dejar de lado la discreción y comentar de viva voz el caso general. De paso, si alguien gusta poner un poco de retardo al asunto, no hay por qué privarse: lo que veremos vale también (sin cambiar ni una coma) para el problema $x'(t) = \varepsilon f(t, x_t, \varepsilon)$. Por comodidad, podemos escribir esto en la forma $x'(t) = \varepsilon N_\varepsilon(x)(t)$, donde N viene de "no lineal" pero también de *Nemitskii.*

Y ante todo, la resonancia: como se recordará, vimos que el problema $x'(t) = \varphi(t)$ con $\varphi \in C_T$ admite solución T-periódica si y solo si $\overline{\varphi} = 0$, lo que permite definir un inverso a derecha del operador $Lx := x'$, es decir: un operador K dado por $K\varphi = x$, la única solución del problema $Lx = \varphi$ tal que $\overline{x} = 0$. Notemos que K está definido en $\tilde{C}_T$, donde el rulito es la notación habitual para definir el subespacio consistente en aquellas funciones que tienen promedio 0. Y si bien la imagen de K está contenida en C_T^1, a los fines de plantear un problema de punto fijo conviene pensar directamente $K : \tilde{C}_T \to C_T$. Ya que estamos, no es inoportuno observar que toda $x \in C_T$ se escribe en la forma $x = \tilde{x} + \overline{x} \in \tilde{C}_T \oplus \mathbb{R}$. En este "setting" tan particular, el problema T-periódico $Lx = \varepsilon N_\varepsilon(x)$ equivale, para $\varepsilon \neq 0$, a las dos ecuaciones

$$\overline{N_\varepsilon(x)} = 0, \qquad x = \overline{x} + \varepsilon K N_\varepsilon(x)$$

que, como sabemos, se pueden reducir hábilmente a una sola:

$$x = \overline{x} + \overline{N_\varepsilon(x)} + \varepsilon K(N_\varepsilon(x) - \overline{N_\varepsilon(x)}).$$

Precisamente de eso se trata: definir

$$F(x,\varepsilon) := x - [\overline{x} + \overline{N_\varepsilon(x)} + \varepsilon K(N_\varepsilon(x) - \overline{N_\varepsilon(x)})],$$

que incluye también el caso $\varepsilon = 0$. Pero hablando de Roma, cuando $\varepsilon = 0$ tenemos

$$F(x,0) = x - \overline{x} - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t),0)\,dt$$

y los ceros de $F(\cdot,0)$ son constantes, es decir: ceros de ϕ. Supongamos entonces que tenemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x_0) = 0$, ¿qué condición habrá que poner para lograr que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,0)$ sea un isomorfismo? Uno sospecharía, en primer lugar, que es prudente asumir que $D\phi(x_0)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, pero: ¿alcanza con eso?

Y la respuesta es que sí, aunque esto no es tan inmediato. Si bien los ceros son los mismos (entendiendo que identificamos $\mathbb{R}^n$ con las funciones constantes), se trata de operadores en espacios diferentes. Al derivar, la situación empieza a volverse todavía más preocupante, ya que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,0)(\varphi) = \varphi - \overline{\varphi} - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)\varphi(t)\,dt$$

mientras que

$$D\phi(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)\,dt,$$

lo que no parece dejar mucho espacio para meter una φ dentro de la integral. Sin embargo, dada $w \in C_T$, tomando promedio observamos que la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,0)(\varphi) = w$$

equivale a estas dos (el clásico 2×1):

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)\varphi(t)\,dt = \overline{w}, \qquad \varphi - \overline{\varphi} = w - \overline{w}.$$

De esta forma, para hallar φ a partir de w, tenemos que resolver el problema

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)w(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)\,dt(\overline{\varphi} - \overline{w}) = \overline{w},$$

es decir:

$$-D\phi(x_0)(\overline{\varphi} - \overline{w}) = \overline{w} + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)w(t)\,dt$$

o bien

$$-D\phi(x_0)\overline{\varphi} = [I - D\phi(x_0)]\overline{w} + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0,0)w(t)\,dt.$$

¡Victoria, saraca victoria! Como $D\phi(x_0)$ es inversible, para cada w existe un único $\overline{\varphi} \in \mathbb{R}^n$ que satisface esta última ecuación y entonces la preimagen de

w que buscábamos es $\varphi = w - \overline{w} + \overline{\varphi}$. Es fácil ver de manera directa que la aplicación $w \mapsto \varphi$ es continua, aunque -por supuesto- uno podría también invocar el teorema de la aplicación abierta. En definitiva, probamos el siguiente resultado:

Teorema 1.2 *En la situación anterior, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un cero de ϕ tal que $D\phi(x_0)$ es inversible, entonces existe $\delta > 0$, un entorno V de x_0 en C_T y una única $x : (-\delta, \delta) \to V$ tal que $x(0) \equiv x_0$ y $x(\varepsilon)$ es solución del problema para todo ε.*

2 Los extremos se tocan

Todo el trabajo que nos tomamos para entender la diferenciación en espacios de Banach parece hecho a medida para resolver un problema de gran importancia: encontrar extremos de funcionales. Esa es, en esencia, la idea central del cálculo variacional, donde las "variaciones" no son otra cosa que las direcciones respecto de las cuales uno deriva. Las famosas *ecuaciones de Euler-Lagrange* muestran que, en muchos casos, encontrar un punto crítico de una funcional equivale a resolver una ecuación diferencial. Pero también se puede pensar al revés: para estudiar la existencia de soluciones (y otras propiedades) de cierta ecuación, analizar la funcional asociada. Claro que no siempre uno tiene la fortuna de que el problema a estudiar sea la ecuación de Euler-Lagrange de cierta funcional; en caso de que esto no ocurra, se dice que el problema es *no variacional* (o, si se quiere ser más elegante, que *no tiene estructura variacional*) y uno debe intentar por otro lado. Por ejemplo, métodos topológicos.

Los métodos variacionales requieren algunos resultados de análisis funcional que no veremos; de todas formas, podemos dar una miradita a ver si entendemos algo. Una ecuación que ya mencionamos es la del péndulo,

$$u''(t) + \operatorname{sen} u(t) = p(t) \tag{2}$$

con p una función T-periódica. Según dijimos, si $\overline{p} = 0$ entonces hay soluciones T-periódicas, aunque el resultado no sale con técnicas de punto fijo ni teoría de grado. Esto explica por qué el problema con un término de fricción

$$u''(t) + cu'(t) + \operatorname{sen} u(t) = p(t),$$

que no es variacional, permaneció abierto por un buen tiempo hasta que R. Ortega encontró un contraejemplo para T chico (en el que nos "inspiramos" para la situación más sencilla que vimos en la clase 3). Más tarde el resultado de Ortega se generalizó: para cualquier período T y cualquier c es posible encontrar p de promedio 0 tal que el problema no tiene soluciones [2].

Volviendo (como todo buen péndulo) a la ecuación (2), observemos que las soluciones T-periódicas se pueden encontrar como puntos críticos de la funcional

$$I(u) = \int_0^T \left[\frac{u'(t)^2}{2} + \cos u(t) + p(t)u(t) \right] dt$$

en algún espacio adecuado de funciones T-periódicas. En efecto, alcanza con observar que

$$DI(u)(\varphi) = \int_0^T [u'(t)\varphi'(t) - \operatorname{sen} u(t)\varphi(t) + p(t)\varphi(t)]\, dt$$

y, si aceptamos por un momento que u es dos veces derivable, entonces vale

$$DI(u) = 0 \iff \int_0^T [-u''(t) - \operatorname{sen} u(t) + p(t)]\varphi(t)\, dt \quad \forall\, \varphi.$$

En otras palabras, dejando de lado los detalles: u es punto crítico de I si y solo si satisface (2). ¿Cuáles son "los detalles"? Precisamente, encontrar el "espacio adecuado" de funciones derivables (en algún sentido) y garantizar que, en efecto, la integración por partes que hicimos con tanta despreocupación funciona bien. Esto no es difícil, aunque va más allá de los temas del curso; de todas formas es fácil convencerse de que la funcional tiene puntos críticos. En primer lugar, notemos que es 2π-periódica, ya que p tiene promedio 0 y entonces

$$I(u + 2\pi) = \int_0^T \left[\frac{u'(t)^2}{2} + \cos u(t) + p(t)[u(t) + 2\pi]\right] dt = I(u).$$

Luego, alcanza con estudiar su comportamiento en el subconjunto de aquellas funciones u tales que $u(0) \in [0, 2\pi]$. Y aquí es fácil ver que la funcional está acotada inferiormente y es coerciva, ya que si la norma de u se va a infinito, entonces necesariamente $\|u'\|_{L^2} \to \infty$, ya que (la cuenta de siempre) $\|u\|_\infty \leq |u(0)| + T^{1/2}\|u'\|_{L^2}$. Entonces es claro que $I(u) \to +\infty$, porque el término cuadrático le gana al término lineal (y al otro, que está acotado, pa' qué te voy a contar). Como estamos en dimensión infinita, esto no implica en principio que el ínfimo de I se alcance, aunque uno puede echar mano a los teoremas de análisis funcional para demostrar sin mayor problema que si $I(u_n) \to \inf I(u)$ con $u_n(0) \in [0, 2\pi]$, entonces se puede extraer una subsucesión de $\{u_n\}$ que converge a un mínimo u. Los detalles, para el lector; el espacio donde conviene hacer todo esto es $\mathbb{R} + H_0^1(0,T)$; es decir, los elementos u en el espacio de Sobolev $H^1(0,T)$ tales que $u(0) = u(T)$. Revisando un poco los ejemplos que vimos hasta el momento, se puede entender mejor por qué nos resultó fácil entontrar soluciones en ciertos casos. Por ejemplo para el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

la funcional es

$$I(u) = \int_0^T \left[\frac{u'(t)^2}{2} + F(t, u(t))\right] dt,$$

donde $F(t,u) = \int_0^u f(t,s)\, ds$. Si f es acotada es fácil ver que, como antes, I se parece a una especie de parábola (es coerciva). Y si f es creciente en u, tiene todavía más pinta de parábola, porque resulta convexa y el mínimo es único. Si uno se anima, puede dar una miradita a la derivada segunda de I... debería ser definida positiva, ¿no?

Al igual que en $\mathbb{R}^n$, el teorema de la función implícita permite estudiar también problemas de extremos ligados. Un ejemplo célebre es el *problema isoperimétrico*, cuya versión más antigua surge de la disputa entre la reina Dido -fundadora de Cartago- y su díscolo hermanito, que no se llamaba Esteban sino Pigmalión. Perseguida, la reina llegó a Libia y le pidió al rey Jarbas un trozo de tierra; el soberano (un soberano amarrete) le ofreció el terreno más grande que pudiera rodear con una piel de buey. La solución de Dido fue la siguiente: tomar el buey más regordete que pudo encontrar y cortar su piel en tiras bien finitas, para atarlas entre sí y quedarse con una región circular. No queda claro qué uso se le puede dar a un terreno así (tal vez sirva para instalar una calesita), pero el hecho es que Dido llegó a la solución sin llegar a chequear los detalles con Weierstrass, quien se ocupó, unos cuantos siglos después, de probar rigurosamente que la solución es, de todas las curvas de longitud dada L, la que encierra un área máxima.[2]

References

[1] Ambrosetti

[2] Ortega, Serra, Tarallo

[2] Antes de Weierstrass, Steiner había logrado probar lo siguiente: si γ es una curva de longitud L que no es una circunferencia, entonces existe otra curva de longitud L que encierra un área mayor. Sin embargo, eso no alcanza, cosa que hizo notar jocosamente Perron diciendo que 1 es el más grande de todos los números naturales, ya que si n es un natural distinto de 1, entonces n^2 es estrictamente mayor que n. El problema del argumento de Steiner es que nada garantiza que el máximo efectivamente se alcanza; lo que hizo Weierstrass fue probar un resultado de compacidad. En el fondo, la situación no es muy diferente al problema del péndulo, en el que nos apoyamos, según dijimos, en "teoremas del análisis funcional" para asegurar que el mínimo se alcanza.